§ 2. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ТЕЛА С ОДНОЙ ЗАКРЕПЛЕННОЙ ТОЧКОЙ

В соответствии с определением кинетической энергии имеем

$$T=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k\bar{v}_k^2=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k\bar{v}_k\cdot\bar{v}_k. \qquad (6)$$

Если заменить один из векторов скорости $\bar{v}_k$ его значением из (2), то получим

$$T=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k\left(\bar{\omega}\times\bar{r}_k\right)\cdot\bar{v}_k=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k\bar{v}_k\cdot\left(\bar{\omega}\times\bar{r}_k\right). \qquad (6')$$

В смешанном произведении трех векторов можно переставлять сомножители в круговом порядке, т. е.

$$\bar{v}_k\cdot\left(\bar{\omega}\times\bar{r}_k\right)=\bar{r}_k\cdot\left(\bar{v}_k\times\bar{\omega}\right)=\bar{\omega}\cdot\left(\bar{r}_k\times\bar{v}_k\right).$$

С учетом этого после вынесения вектора $\bar{\omega}$ за знак суммы получим

$$T={}^1\!/_2\,\bar{\omega}\cdot\sum_{k=1}^{N}\bar{r}_k\times m_k\bar{v}_k={}^1\!/_2\,\bar{\omega}\cdot\bar{K}_O, \qquad (7)$$

так как

$$\sum_{k=1}^{N}\bar{r}_k\times m_k\bar{v}_k=\bar{K}_O.$$

Итак, *кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, равна половине скалярного произведения угловой скорости вращения тела и кинетического момента относительно закрепленной точки.*

Скалярное произведение можно представить в двух формах:

$$T={}^1\!/_2\,\bar{\omega}\cdot\bar{K}_O={}^1\!/_2\,\omega K_O\cos\left(\bar{\omega},\widehat{\bar{K}_O}\right)=$$

$$={}^1\!/_2\left(\omega_x K_x+\omega_y K_y+\omega_z K_z\right). \qquad (7')$$

Так как кинетическая энергия может иметь только положительные значения, то из (7′) следует $\cos\left(\bar{\omega},\widehat{\bar{K}_O}\right)>0$, т. е. угол между мгновенной осью, по которой направлен вектор угловой скорости, и кинетическим моментом относительно закрепленной точки всегда острый.

Если в (7′) величины K_x, K_y, K_z заменить их значениями из (3), то получим

$$T={}^1\!/_2\left(J_x\omega_x^2+J_y\omega_y^2+J_z\omega_z^2-2J_{yz}\omega_y\omega_z-J_{zx}\omega_z\omega_x-2J_{xy}\omega_x\omega_y\right), \qquad (8)$$

т. е. *кинетическая энергия тела с одной закрепленной точкой является квадратичной формой проекций угловой скорости на оси координат.*

В матричной форме, учитывая (1′), кинетическую энергию можно представить формулой

$$T={}^1\!/_2\,\bar{\omega}\left(J\bar{\omega}\right).$$

Если оси координат $Oxyz$ являются главными осями инерции для закрепленной точки O, то $J_{xy}=J_{yz}=J_{zx}=0$ и (8) примет вид

$$T={}^1\!/_2\left(J_x\omega_x^2+J_y\omega_y^2+J_z\omega_z^2\right). \qquad (9)$$

Эта формула является обобщением выражения кинетической энергии, полученного при рассмотрении вращения твердого тела вокруг неподвижной оси. Согласно (9), кинетическая энергия при вращении тела вокруг неподвижной точки

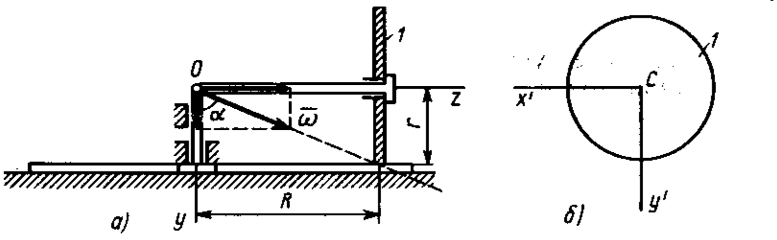

Рис. 134

получается так же, как при одновременном вращении вокруг трех неподвижных главных осей инерции, проходящих через эту точку.

Проверкой можно убедиться, что как в общем случае, так и в случае главных осей инерции справедливы формулы

$$K_x=\partial T/\partial\omega_x;\quad K_y=\partial T/\partial\omega_y;\quad K_z=\partial T/\partial\omega_z.$$

Для случая вращения тела вокруг неподвижной оси

$$K_z=\partial T/\partial\omega_z.$$

Пример. Диск *1*, имея закрепленную точку O (рис. 134, *а*), катится без скольжения по плоскости.

Вычислить кинетическую энергию диска.

Решение. Выберем за подвижные оси координат главные оси инерции для точки O, скрепленные с диском. Имеем

$$T={}^1\!/_2\left(J_x\omega_x^2+J_y\omega_y^2+J_z\omega_z^2\right).$$

Мгновенная ось для диска *1*, по которой направлена угловая скорость $\bar{\omega}$, проходит через неподвижную точку O и точку соприкосновения диска с неподвижной плоскостью. Главными осями инерции диска являются ось симметрии Oz и две любые оси Ox и Oy, перпендикулярные ей в силу симметрии диска. Для этих осей имеем:

$$\omega_x=0;\quad \omega_y=\omega\cos\alpha=\omega\frac{r}{\sqrt{r^2+R^2}};\quad \omega_z=\omega\sin\alpha=\omega\frac{R}{\sqrt{r^2+R^2}}.$$

Момент инерции

$$J_z=mr^2/2.$$

Моменты инерции относительно осей Ox и Oy вычисляем с использованием теоремы Штейнера. Имеем

$$J_x=J_{Cx'}+mR^2;\quad J_y=J_{Cy'}+mR^2.$$

Для диска (рис. 134, *б*)

$$J_{Cx'}=J_{Cy'}=mr^2/4.$$

Используя эти значения моментов инерции, получаем

$$J_x=m\left(r^2/4+R^2\right);\quad J_y=m\left(r^2/4+R^2\right).$$

Для кинетической энергии с учетом $\omega_x=0$ имеем

$$T=\frac{m\omega^2}{2}\left[\left(r^2+4R^2\right)\frac{r^2}{4\left(r^2+R^2\right)}+\frac{2r^2}{4}\frac{R^2}{r^2+R^2}\right]=$$

$$=\frac{m\omega^2r^2}{8\left(r^2+R^2\right)}\left(r^2+4R^2+2R^2\right)=\frac{m\omega^2r^2}{8\left(r^2+R^2\right)}\left(r^2+6R^2\right).$$